

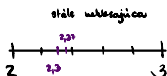
Matematická analýza

6.10.2021

REALNE ČÍSLA



2
2,3
2,37
2,370
...



najmenšie horné ohraničenie: **SUPRÉMUM**

• množina $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$

(1) $\forall x \in \mathbb{R}: x + 0 = x$

1 $x \cdot 1 = x$

(2) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}: x + y = 0$ (-)

2 $\forall x \neq 0 \exists y: x \cdot y = 1$

(3) $x \cdot y = y \cdot x$

3. to isté pre .

(4) $(x+y)+z = x+(y+z)$

4. —||—

TRICHOTOMIA USPOBIADANIA

(01) pre každé $x, y \in \mathbb{R}$ nastane práve 1 z možností: $x < y, x = y, x > y$.

(02) **TRANSITIVNOSŤ**
 $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$

(03) $\forall x \in \mathbb{R}: 1(x=2)$?

(04) $0 < 1$

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}: x < y \Rightarrow x + z < y + z$

$(\forall x, y \in \mathbb{R}) (\forall z \in \mathbb{R}, z > 0): x < y \Rightarrow x + z < y + z$

AKCIOMA O SUPRÉME: Každá neprázdna, zhora ohraničená množina $A \subset \mathbb{R}$ má **SUPRÉMUM** $\rightarrow$ najmenšie horné ohraničenie

$\hookrightarrow$ PREČO NIE MAXIMUM?

(alebo pre $0, \bar{a}$ je suprimum 1)

a tá už je v množine

TVR: $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0 \exists n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n} < x$
 tento výrok hovorí
 platí $\uparrow$
 že vždy existuje
 ľubovoľne malé
 číslo

MODUS PONENS:

$((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow B$

základ vyústenia veľkého
 "NON TERCIOUM QUAERITUR" ?

MODUS TOLENS:

$((C \Rightarrow B) \wedge \neg B) \Rightarrow \neg C$

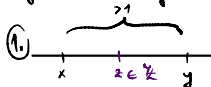
D. (sporom): $\exists x \in \mathbb{R}, x > 0 \forall n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n} \geq x$

$\exists x \in \mathbb{R}, x > 0 \forall n \in \mathbb{N}: \frac{1}{x} \geq n$ **SPOR**

(na zhora ohraničenej množiny)

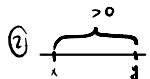
TVR: Medzi každými dvoma reálnymi číslami leží aspoň 1 racionálne.

D:



$L \cup J = \max \{ m \in \mathbb{Z}, m \leq L \}$

↓
 zaokrúhľovanie
 nadol
 (dolná celá časť)



$\frac{1}{n} < y - x$

$1 < ny - nx$

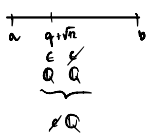
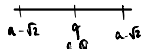
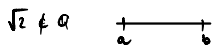
$\exists z \in \mathbb{Z}, nx < z < ny$

$x < \frac{z}{n} < y$

medzi každými
 dvoma reálnymi
 číslami leží
 aspoň jedno
 racionálne číslo

13.10.2021

#medzi dvoma realnymi je aspoň 1 racionálne



Existuje číslo $\beta \in \mathbb{R}$; $\beta > 0$ a $\beta^2 = 2$

$M = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \wedge x^2 < 2\}$ odhadneme 2 dvoch je pre into množinu suprenum

M je neprázdna a štvora drahá. $\beta^2 = 2$

Arizma o zva

$\exists \beta := \sup M$
chceme dokázať: $\beta^2 = 2$

a to tak, že neploží

$\beta^2 < 2$

$\beta^2 > 2$



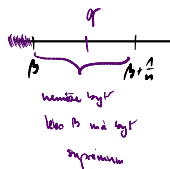
Keby $\beta^2 < 2$

$$\left(\beta + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$$

očakávam, že by malo
existovať ešte nejaké o trošku
väčšie číslo, pre kt. to platí

ale vieme že to je
hlboš, čo ale by
som mal byť, pre kt.

platí $\beta^2 < 2$ tak by malo byť v množine M , ale nie je



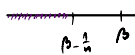
$$\beta^2 + \frac{2\beta}{n} + \frac{1}{n^2} < 2$$

$$\leq \beta^2 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n}$$

$$\beta^2 + \frac{5}{n} < 2$$

$$\frac{1}{n} < \frac{2 - \beta^2}{5}$$

Keby $\beta^2 > 2$



hlboš, čo musí byť najmenšie
horú odhadneme

FUNKCIA REÁLNEJ PREMENNEJ

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$[1, 0]$$

$$\left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right]$$



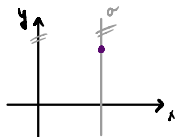
keď stlačíš x , tak sa ti ove práve 1 y
(jednoznačnosť)

PROSTÁ (INJEKTIVNÁ) FUNKCIA

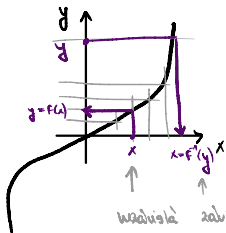
f je injekt, ak $\forall x_1, x_2 \in D(f) : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

to ide, čo ale
nie sú rovnaké,
tak je jedno
vznáša



o y nemôže graf
prechádzať viac ako
1-krát (ale, nie funkcia)



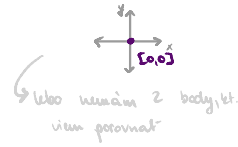
záleží na tom,
kt premenná (x/y)
je (ne)závislá

MONOTONOST

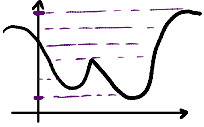
rostúce $\forall x_1, x_2 \in D(f): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
 klesajúce $\forall x_1, x_2 \in D(f): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
 nerastúce $\forall x_1, x_2 \in D(f): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
 neklesajúce $\forall x_1, x_2 \in D(f): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

} rydzo monotónne
 # ak je rydzo monotónne
 ↓
 prostá (napríklad nie)
 pr. 
 (niekoľko?)
 # zdanlivá monotónnosť...
 napríklad na interval

graf funkcie $f: y = \sqrt{x}$



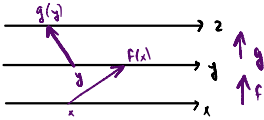
CHRAŇČENOST



premier $\forall$ bodov
na os

supremum
infimum

ZLOŽENÁ FUNKCIA



$$z = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$

$$D(g \circ f) = \{x \in D(f), x \in D(g)\}$$

$$\begin{aligned}
 (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\
 D(f+g) &= D(f) \cap D(g) \\
 D\left(\frac{f}{g}\right) &= ?
 \end{aligned}$$

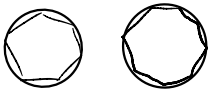
20. 10. 2021

ZÁKLADNÉ ELEMENTÁRNE FUNKCIE

- konštantné, mocninové
- logaritmicke, exponenciálne, cyklometrické, goniometrické
- elementárne - súčinné spojením elementárnych funkcií, spojových konštantných množstvom operácií (+, -, ·, :), ale najmä

- každému má jedinečne priradené je funkcia (musí mať predpis)

LIMITA - alebo sa k nim chceme dostať



- v praxi je n-uhelník
 do stáleho perimetru máme π



n je veľké $\Rightarrow |a_n - \pi|$ je malý

↑
 čím to určiť
 takí malí,
 ako chceme

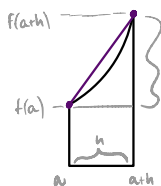
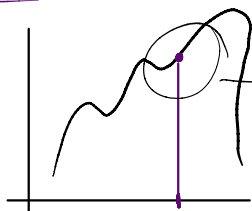
fyzikálne spôsobom vieme
 čiže určiť funkčnosť
 presne

$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 \Rightarrow |a_n - \pi| < \epsilon$ - # ako ďaleko pripustíme, že vieme výsledkom

... stále lepšie aproximácie π
(približnosť a_n to nie)

hodnotu π

Strmost



$$f(a+h) - f(a)$$

$$g(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall h, |h-a| < \delta \quad |g(h) - S| < \epsilon$$

$$\hookrightarrow h \rightarrow 0 \Rightarrow g(h) \rightarrow S$$

$$x \rightarrow a \Rightarrow \frac{1}{g(x)} \rightarrow 0$$

$f(x)$ musí mať podobu
byť lineárne veľké

$$\forall K \exists \delta > 0 \forall x, |x-a| < \delta \Rightarrow g(x) > K$$

$$x \rightarrow a \Rightarrow g(x) \rightarrow \infty$$

↓
sjednotenie týchto zápisov

↑
strmost
↑
vychádzať sa na nekonečno
musíme mať sekantnosť
nadvýškat lineárne veľké
veľkosti

$x \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow \Delta$ samostatné hodnoty ∞ na nezávislých, iba jej dôležité

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \Delta$$

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow y = f(x) \rightarrow \Delta$$

$$\Delta \in \mathbb{R}$$

$$+\infty$$

$$-\infty$$

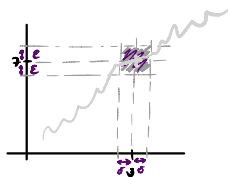
$$\Delta$$

$$+\infty$$

$$-\infty$$

čo to je?
či má byť
 $L \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 7$$

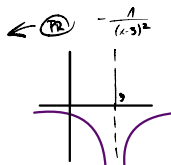
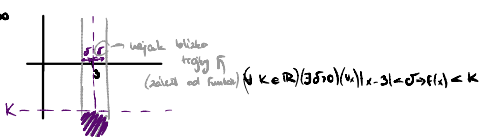


kontrolný matematicko-olný orgán

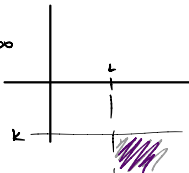
funkcia sa spája

inteligentná celná správa

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$



$$\forall K \in \mathbb{R} \exists L \forall x, x > L \Rightarrow f(x) < K$$

čím väčšie sa hodnoty podávajú na ∞ , tým viac sa hodnoty podávajú na domček

$$x \rightarrow \infty \Rightarrow f(x) \rightarrow \Delta$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \Delta$$

$$\forall \text{ blízko } \Delta \exists \text{ blízko } \Delta \forall x: x \text{ je dost } \text{ blízko } \Delta \Rightarrow f(x) \text{ je dost } \text{ blízko } \Delta$$

$$\Delta = a \quad |x-a| < \epsilon \quad x \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$$

$$+\infty$$

$$-\infty$$

$$x \in (K, \infty)$$

$$x \in (-\infty, K)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 7$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D(f): 0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |f(x) - 7| < \varepsilon$$

$$x \in (3 - \delta, 3 + \delta) \quad f(x) \in (7 - \varepsilon, 7 + \varepsilon)$$

$$x \neq 3$$